# DETERMINAÇÃO DE CURVAS DE NÍVEL EM TERRENOS REPRESENTADOS POR SUPERFÍCIES BICÚBICAS

Milton Teruaki Suetsugu Sakude
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
CTA - ITA - IED - IECC
12225 - São José dos Campos - SP

**RESUMO**

O procedimento manual para determinação de curvas de nível usadas em Topografia nas cartas de levantamentos altimétricos é uma atividade demorada, tediosa e sujeita a erros. Essas características podem ser revertidas pelo uso de um computador digital na automação desse processo. Além disso, ganha-se em qualidade e precisão quando da obtenção de pontos das curvas por interpolação, pois, além dos métodos lineares, pode-se utilizar interpoladores não lineares com os pontos levantados diretamente no campo. Isto vai reverter em modelos matemáticos de representação de terrenos mais sofisticados. Apresenta-se neste trabalho um algoritmo para determinação de curvas de nível em terrenos representados matematicamente por superfícies bicúbicas.

## I. INTRODUÇÃO

Existem vários processos para a representação de um terreno em cartas topográficas de levantamentos altimétricos. Pode-se citar entre outros: pontos cotados, tintas hiposométricas, curvas de nível e recursos diversos de perspectiva. Destaca-se, entre esses, o processo das curvas de nível que, por ser provavelmente o melhor, tem sido o mais empregado [1].

As curvas de nível são meios que permitem representar as variações das alturas em terrenos. Uma curva de nível é uma linha imaginária que conecta pontos de uma mesma elevação. Em geral, as curvas de nível são desenhadas para representar os intervalos de alturas equidistantes acima de um dado plano de referência [2].

O processo manual tradicionalmente empregado para determinação de curvas de nível consiste na coleta de alturas (cotas) de pontos de um terreno através de um levantamento de campo e a obtenção de pontos de mesma cota através de cálculos, principalmente interpolação linear, em escritório. A segunda fase do processo é cansativa, demorada e não raro imprecisa pois supõe variações homogêneas no terreno que está sendo linearmente modelado ou então pela repetitividade da tarefa.

A precisão e a qualidade desta segunda fase podem ser em muito melhoradas usando-se um computador digital como ferramenta de cálculo. Além disso, com as facilidades de exibição gráficas e de impressão hoje existentes e disponíveis nos sistemas computacionais, é possível, a partir de pontos levantados no campo, gerar automaticamente as cartas altimétricas desejadas. Pode-se também, se for o caso, através de um processo interativo, escolher diferentes interpoladores para os pontos levantados, gerar diferentes cartas, analisar os resultados preliminares numa tela e imprimir apenas a carta considerada (visualmente, matematicamente) satisfatória. Todo esse trabalho sendo realizado num tempo de resposta muito rápido, não comparável ao processo tradicional.

Para que se possa tratar automaticamente os mapas num computador, é necessário escolher-se uma representação interna dos terrenos que não somente permita, mas também facilite, essa manipulação mecanizada. Uma possibilidade de representação que tem sido explorada são equações algébricas que descrevem superfícies bicúbicas. Nesse modelo de terreno, a determinação de curvas de nível passa a ser o problema analítico de se determinar a intersecção de um plano com a equação da superfície que descreve o terreno. O problema recai na determinação de raízes de equações, que pode ser resolvido pelo emprego de métodos numéricos.

Apresenta-se neste trabalho um algorítmo para determinar, com uma precisão estabelecida, as curvas de nível de um terreno modelado por superfícies bicúbicas.

## II. MODELO DA SUPERFÍCIE DO TERRENO

Geralmente, o traçado das curvas de nível é feito manualmente por interpolação linear dos pontos obtidos por medição do terreno [2]. Para cálculos com maior precisão, utilizam-se modelos de superfícies de facetas triangulares ou de quadriláteros [3]. A intersecção do plano de nível com a superfície do terreno é uma poligonal. Normalmente, ela é suavizada para dar a aparência de uma curva.

Existem vários modelos de superfícies que usam interpolação não linear ou ajuste dos pontos de entrada. Dificilmente consegue-se representar todo um terreno com uma única equação de superfície. Um terreno complexo, então, é representado pela junção de vários retalhos de superfícies, cada qual com uma equação, podendo ter ou não junções suaves. Nesta abordagem, alguns pontos vizinhos são analisados para a obtenção da equação do retalho.

Neste trabalho, as superfícies do terreno são descritas por meio de retalhos bicúbicos de Coons. No método de Coons, é necessário conhecer as quatro curvas das bordas e suas derivadas ou os quatro pontos (cantos do retalho) e suas derivadas (fig. 1). Basicamente, a superfície no interior do retalho é resultado da interpolação dos contornos. As derivadas são importantes para se fazer uma interpolação não linear e para se ter junções suaves [4], [5], [6].

A equação de Coons que relaciona os quatro pontos dos cantos do retalho e as suas derivadas (fig. 1) é dada, parametricamente, por [4], [5], [6]:

$$S(u,v)=\begin{bmatrix} F_0(u) & F_1(u) & F_2(u) & F_3(u)\end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(0,1) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(v) \\ F_1(v) \\ F_2(v) \\ F_3(v) \end{bmatrix}$$

onde:

u e v são parâmetros independentes que variam de 0 a 1; os valores 0 e 1 referem-se às bordas do retalho;

$F_i$ são funções de mistura;

$P_u$ e $P_v$ representam as derivadas parciais (vetores tangentes) e $P_{uv}$, as derivadas mistas (vetores de torção - "twists vectores").

Para as superfícies bicúbicas, as funções de mistura são [5], [6]:

$$F_0(t) = 1 - 3\,t^2 + 2\,t^3$$

$$F_1(t) = 3\,t^2 - 2\,t^3$$

$$F_2(t) = t - 2\,t^2 + t^3$$

$$F_3(t) = -\,t^2 + t^3$$

Em geral, só se conhece os pontos pertencentes ao terreno. Neste caso, as derivadas $P_u$, $P_v$ e $P_{uv}$ devem ser estimadas. No presente trabalho, as derivadas $P_u$ e $P_v$ são estimadas usando a interpolação por Splines Cúbicos e os valores das derivadas mistas $P_{uv}$ podem ser tomados como nulos para fa-

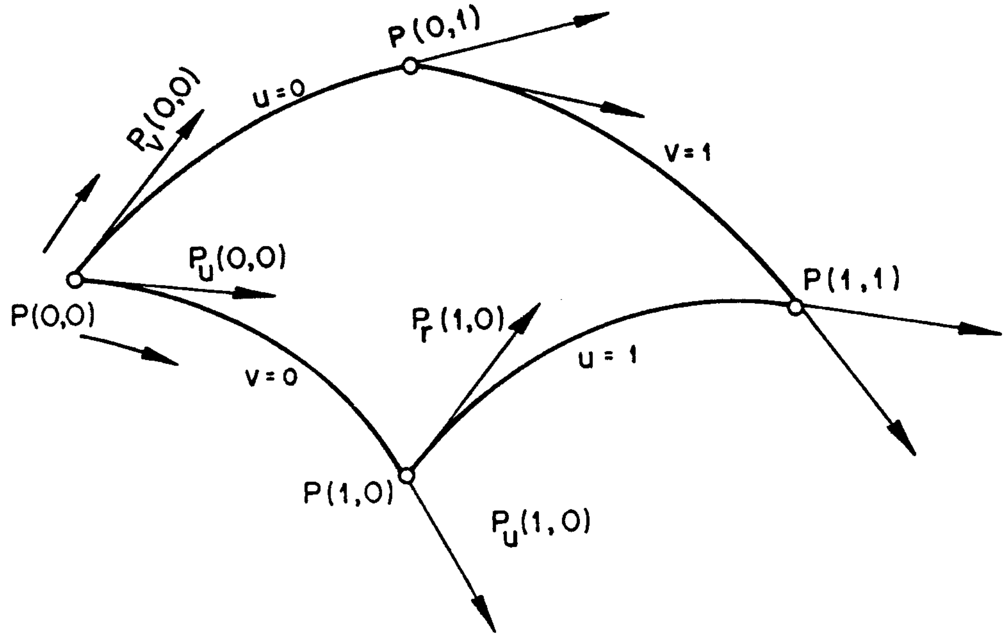


Fig. 1 - Retalho bicúbico de Coons

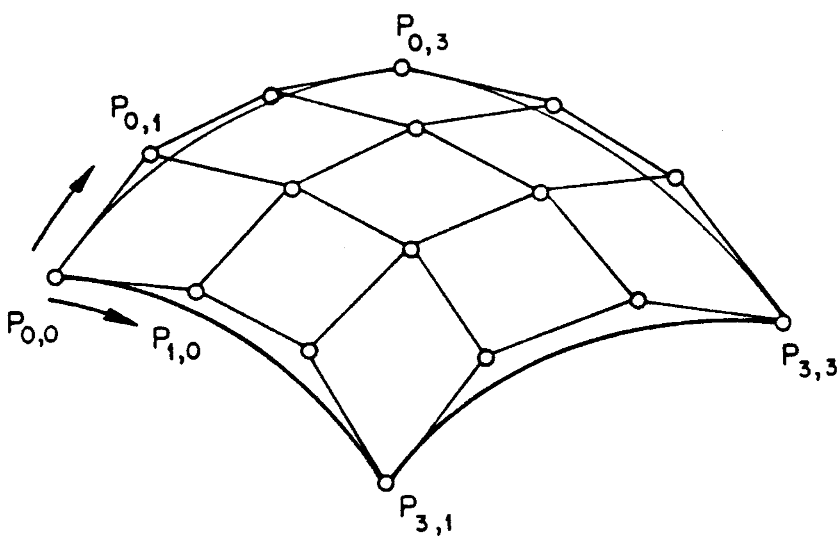


Fig. 2 - Retalho bicúbico de Bezier e seus pontos de controle

cilidade de representação [6].

## III. DETERMINAÇÃO DAS CURVAS DE NÍVEL

Uma curva de nível representa a intersecção de uma superfície plana de altura constante com o terreno, ou seja, a intersecção de um plano com as equações que representam a superfície do terreno.

Para a representação usada (superfície bicúbica), cada ponto da curva é, matematicamente, uma das raízes de uma equação com duas variáveis. Computacionalmente, por meios tradicionais como Newton-Raphson, a determinação de todas as raízes é uma tarefa difícil e nem sempre executável, pois, geralmente, é necessário fornecer um valor inicial (chute) próximo à raiz procurada para garantir a convergência do método. Para evitar a descontinuidade no traçado da curva, deve-se representar uma curva por pequenos segmentos de retas (poligonal). A complexidade do problema pode ser reduzida tomando-se as curvas isoparamétricas (curvas de u ou de v constantes) e, então, determinar a intersecção destas curvas com o plano de nível. Teria que se tomar curvas espaçadas de pequenos incrementos do parâmetro u e do v. Esta abordagem é eficaz, porém complexa para ser implementada, desta maneira, em um computador. Muitas curvas analisadas poderiam não ter raízes, caso em que a procura de raiz é inútil, ou ter mais de uma, caso em que todas as raízes devem ser determinadas. Além disso, existe o problema de ligar os pontos da curva corretamente, pois, às vezes, torna-se necessário ligar pontos resultantes da intersecção das curvas de u constante com os pontos da intersecção das curvas de v constante. Os segmentos de retas devem ser pequenos para dar a aparência de uma curva relativamente suave (o tamanho máximo pode ser especificado pelo usuário). Esta exigência pode complicar ainda mais a implementação, pois teria que se tomar incrementos cada vez menores de u e de v.

Neste trabalho, foi utilizado um algoritmo de Subdivisão baseado no algorítmo de Casteljau [7], para a determinação das curvas de nível.

Para facilitar a análise e os cálculos, foram utilizadas as equações de Bezier na representação dos retalhos da superfície. A mesma superfície de Coons passa a ter a seguinte equação:

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} B_i^3(u)\ B_j^3(v)\ P_{ij}$$

$$B_k^3(t) = \binom{3}{k} t^k (1-t)^{3-k}$$

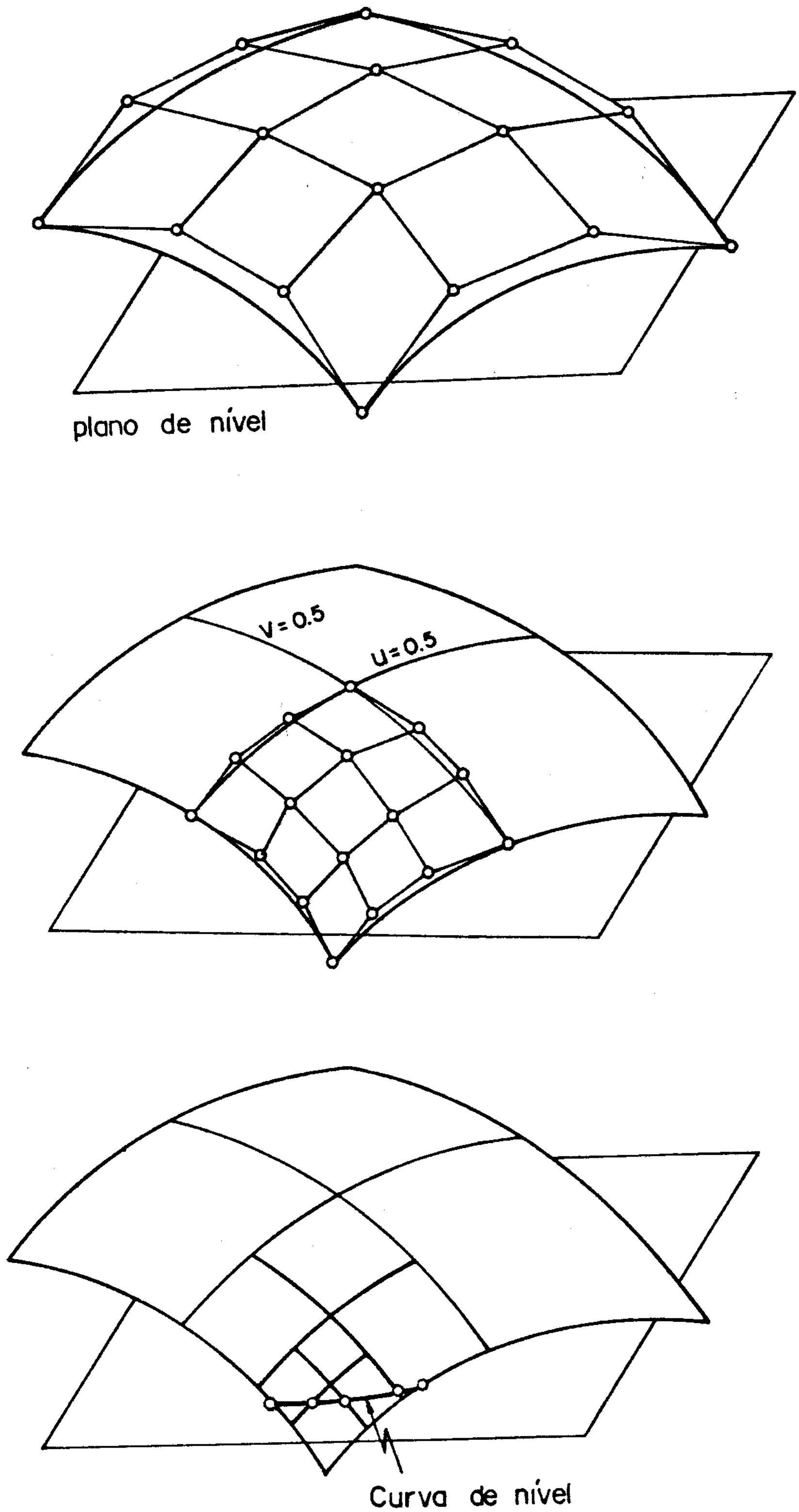


Fig. 3 - Algoritmo da Subdivisão

onde $P_{ij}$ são os pontos de controle e $B_k^3$ (t) representa o polinômio de Bernstein [8]. Os pontos de controle $P_{ij}$ são obtidos resolvendo sistemas de equações lineares.

Nesta representação, os pontos de controle são dispostos de tal forma que um poliedro convexo formado por estes pontos envolve totalmente a superfície (fig. 2). O teste para saber se o plano de nível corta a superfície pode ser feito simplesmente pela verificação da intersecção do plano de nível com os segmentos de reta que definem o poliedro. Esta verificação não garante a intersecção, porém, se o plano não cortar o poliedro, certamente, não haverá a intersecção.

A pesquisa de intersecção é feita usando um algoritmo recursivo de Subdivisão, dividindo a superfície em quatro pedaços através das curvas isoparamétricas u=0.5 e v=0.5 (fig. 3). Por este procedimento, os novos pontos de controle tornam-se cada vez mais próximos à superfície a ponto de confundir com a própria superfície. Cada pedaço da superfície passa pelo rápido teste de verificação da intersecção do plano com o poliedro e aqueles pedaços que não passam por este teste são abandonados (fig. 3). O processo recursivo cessa quando se tem uma malha de controle pequena ou quando as intersecções das bordas da superfície com o plano resultam em um segmento de reta menor do que um comprimento máximo especificado. O ponto de intersecção é calculado usando um algorítmo de Subdivisão com uma precisão estabelecida e é sempre a intersecção das curvas das bordas da superfície com o plano de nível.

## IV. RESULTADOS

A figura 4 mostra um dos resultados obtidos pelo algoritmo descrito anteriormente. A região preenchida da figura representa uma parte plana de um platô que, matematicamente, é um plano de altura constante. São curvas de nível muito próximas uma à outra, o que dá o aspecto de preenchimento. É um resultado interessante.

## V. CONCLUSÕES

A utilização do algoritmo de Subdivisão permite a determinação, de forma segura, das curvas de nível em terrenos representados por superfícies e com uma precisão estabelecida pelo usuário. O algoritmo apresentado é convergente e pode ser considerado rápido em termos computacionais. Qualquer precisão aceitável pelo sistema de ponto flutuante utilizado poderia ser imposta, porém uma precisão muito acurada perde o significado, pois a representação da superfície é aproximada.

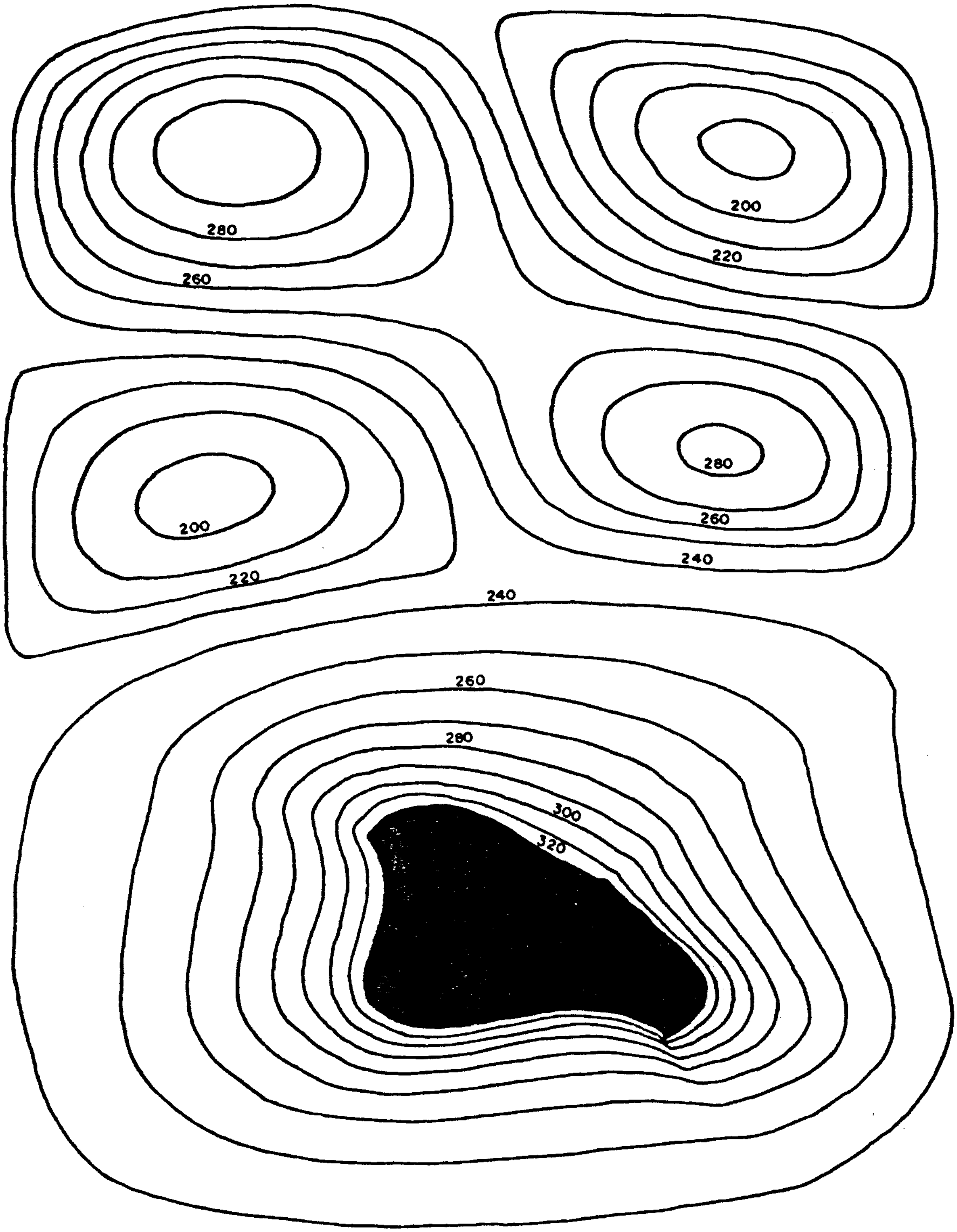


Fig. 4 - Curvas de nível

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] UZÊDA, O.G. "Topografia", Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1963.

[2] SANDOVER, J.A. "Topografia", Barcelona, Continental, 1967.

[3] McCORMAC, J.C. "Surveying Fundamentals", Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1983.

[4] COONS, S.A. "Surface for Computer-Aided Design of Space Forms", Massachusetts, MIT, 1967, (MAC-TR-41).

[5] FORREST, A.R. On Coons and Other Methods for the Representation of Curved Surfaces, "Computer Graphics and Image Processing", 1: 341-359, 1972.

[6] SAKUDE, M.T.S. "Geração de Superfícies Usando o Método de Coons", Tese de Mestrado, ITA, São José dos Campos, 1988.

[7] BOHM, W.& FARIN, G.& KAHMANN, J.A. Survey of Curve and Surface Methods in CAGD, "Computer Aided Geometric Design", 1: 2-60, 1984.

[8] BEZIER, P. "Essai de Definition Numerique des Courbes et Surfaces Experimentales", These de Doctorat, Paris, l'Universite Pierre et Marie Curic, 1977.